Приложение 2 к РПД
Уравнения математической физики
01.03.02 Прикладная математика и информатика
направленность (профиль)
Системное программирование
и компьютерные технологии
Форма обучения – очная
Год набора – 2022

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
3.	Направленность (профиль)	Системное программирование и компьютерные технологии
4.	Дисциплина (модуль)	К.М.01.02 Уравнения математической физики
5.	Форма обучения	Очная
6.	Год набора	2022

2. Перечень компетенций

– **УК-2**: Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)	Формируемая компетенция	Критерии и показатели оценивания компетенций			Формы контроля сформированности компетенций
		Знать:	Уметь:	Владеть:	
Уравнение колебаний струны	УК-2	основные понятия и утверждения, входящие в содержание дисциплины, основные методы решения краевых задач	решать задачи по разделам курса, применять теоретический материал, творчески подходить к решению профессиональных задач, строить математические модели физических задач, приводить их к нужному виду, выбирать и реализовывать наиболее рациональный метод решения поставленной задачи	владение современными знаниями о методах решения задач математической физики	Контрольная работа коллоквиум
Уравнение теплопроводности	УК-2				Контрольная работа
Уравнение Лапласа	УК-2				Итоговая контрольная работа

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

1. Контрольная работа «Уравнение колебаний струны»

Количество правильно решенных заданий	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество баллов за решенное задание	2	2	2	2	2	2	2	3	3
Итого:	20								

2. Контрольная работа «Уравнение линейной теплопроводности»

Количество правильно решенных заданий	1	2	3	4	5	6	7
Количество баллов за решенное задание	3	2	3	3	3	3	3
Итого:	20						

3. Итоговая контрольная работа

Количество правильно решенных заданий	1	2	3	4	5	6
Количество баллов за решенное задание	3	4	3	3	3	3
Итого:	20					

4. Коллоквиум «Уравнение колебаний струны»

Номер вопроса	1	2
Количество баллов за ответ на вопрос	10	10
Итого:	20	

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

5.1 Типовое контрольное задание

1. Преобразовать уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ к каноническому виду..

Решение. Уравнение характеристик (для уравнения $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0$ оно имеет вид $a_{11}dy^2 - \ -2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$) будет таким

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Оно распадается на два дифференциальных уравнения:

$dx - adt = 0$ и $dx + adt = 0$,

интегралами, которых являются прямые

$$x - at = C_1, \ \ x + at = C_2.$$

Введем новые переменные

$$\xi = x + at, \ \ \eta = x - at.$$

Выразим частные производные функции u по x и t через новые переменные ξ и η:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot(-a) = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)\cdot 1+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)\cdot 1=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=a\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}=$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right).$$

Подставим в уравнение $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ найденные для вторых производных выражения, получим

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

$u_{\xi\eta}=0$.

2. Решить смешанную задачу:

$$u_{tt}=9u_{xx},\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=15\pi\sin 5\pi x,\ u(0,t)=0,\ u_x(3{,}5;t)=0.$$

Решение. Решение ищем в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$.

Подставим это выражение для $u(x,t)$ в уравнение $u_{tt}=9u_{xx}$.

Получим $X(x)T''(t)=9X''(x)T(t)\Rightarrow\ \Rightarrow\frac{1}{9}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda=\text{const}\Rightarrow$

$X''(x)-\lambda X(x)=0,\ X(0)=0,\ X'(3{,}5)=0$ – задача Штурма – Лиувилля. Известно, что собственные числа этой задачи равны $\lambda_k=-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2,\ k=0,1,\ \dots$

В нашем случае $l=3{,}5$, то есть $\lambda_k=-\left(\frac{(2k+1)\pi}{7}\right)^2$. Тогда собственные функции полученной задачи Штурма – Лиувилля имеют вид: $X_k(x)=\sin\frac{(2k+1)\pi x}{7},\ k=0,1,\ \dots$

Найдем теперь функции $T(t)$. Имеем $T_k''(t)+\left(\frac{3(2k+1)\pi}{7}\right)^2T_k(t)=0$.

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$r^2+\left(\frac{3(2k+1)\pi}{7}\right)^2=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm\frac{3(2k+1)\pi}{7}i.$$

Поэтому общее решение полученного для $T(t)$ уравнения будет таким:

$$T_k(t)=a_k\cos\frac{3(2k+1)\pi t}{7}+b_k\sin\frac{3(2k+1)\pi t}{7}.$$

Тогда $u_k(x,t)=\left(a_k\cos\frac{3(2k+1)\pi t}{7}+b_k\sin\frac{3(2k+1)\pi t}{7}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{7}$.

Следовательно,

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{3(2k+1)\pi t}{7}+b_k\sin\frac{3(2k+1)\pi t}{7}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{7}.$$

Найдем теперь a_k и b_k, используя начальные условия.

Имеем $u(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{7}=0 \Rightarrow a_k=0 \quad \forall k$.

Найдем $u_t(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3(2k+1)\pi}{7}\left(-a_k \sin\frac{3(2k+1)\pi t}{7}+b_k\cos\frac{3(2k+1)\pi t}{7}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{7}$.

Тогда $u_t(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3(2k+1)\pi}{7}b_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{7}=15\pi\sin 5\pi x \Rightarrow$

$\frac{3(2k+1)\pi}{7}b_k=\frac{4}{7}\int_0^{3,5}15\pi\sin 5\pi x\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi x}{7}dx \Rightarrow$ все $b_k=0$, кроме b_{17}. Найдем b_{17}. Имеем

$15\pi b_{17}=\frac{4}{7}\cdot 15\pi\int_0^{3,5}\sin^2 5\pi x dx \Rightarrow b_{17}=\frac{4}{7}\cdot\int_0^{3,5}\sin^2 5\pi x dx=\frac{2}{7}\cdot\int_0^{3,5}(1-\cos 10\pi x)dx=$

$=\frac{2}{7}\cdot 3,5=1$. Значит, $u(x,t)=\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x$.

Проверка. $u(x,0)=\sin 0\cdot\sin 5\pi x=0$ – верно,

$u_t(x,t)=15\pi\cos 15\pi t\cdot\sin 5\pi x \Rightarrow u_t(x,0)=15\pi\sin 5\pi x$ – верно, $u(0,t)=\sin 15\pi t\cdot\sin 0=0$ – верно, $u_x(x,t)=$

$=5\pi\sin 15\pi t\cdot\cos 5\pi x \Rightarrow u(3,5;t)=5\pi\sin 15\pi t\cdot\cos\frac{35}{2}\pi=5\pi\sin 15\pi t\cdot\cos\frac{3}{2}\pi=0$ – верно.

Подставим полученное решение в уравнение. Имеем $u_{tt}=-225\pi^2\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x$,

$u_{xx}=-25\pi^2\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x$. Тогда $u_{tt}=9u_{xx} \Leftrightarrow -225\pi^2\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x=$

$=9\cdot\left(-25\pi^2\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x\right) \Leftrightarrow -225\pi^2\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x=-225\pi^2\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x$ – верно.

Ответ: $u(x,t)=\sin 15\pi t\cdot\sin 5\pi x$.

3. Найти отклонение $u(x,t)$ закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной горизонтальной струны от положения равновесия, если в начальный момент струна имела форму параболы с вершиной в точке $x=\frac{l}{2}$ и отклонением от положения равновесия h, а начальные скорости отсутствовали.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в следующем: решить уравнение $u_{tt}=a^2u_{xx}$ при начальных условиях $u(x,0)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$, $u_t(x,0)=0$ и краевых условиях $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Решение ищется в виде:

$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kat}{l}+b_k\sin\frac{\pi kat}{l}\right)\sin\frac{\pi kx}{l}$.

Тогда

$u_t(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}\left(-a_k\sin\frac{\pi kat}{l}+b_k\cos\frac{\pi kat}{l}\right)\sin\frac{\pi kx}{l} \Rightarrow u_t(x,0)==\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{l}b_k\sin\frac{\pi kx}{l}=0$. Следовательно,

$\forall k \quad b_k=0$. Из первого начального условия имеем

$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{\pi kx}{l}=\frac{4h}{l^2}x(l-x) \Rightarrow a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{4h}{l^2}x(l-x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_k=\frac{8h}{l^3}\int_0^l\left(xl-x^2\right)\sin\frac{\pi kx}{l}dx=\begin{pmatrix} u=xl-x^2,\ du=\left(l-2x\right)dx \\ dv=\sin\frac{\pi kx}{l}dx,\ v=-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{\pi kx}{l}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{8h}{l^3}\left(-\frac{l}{k\pi}\left(xl-x^2\right)\cos\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l+\frac{l}{k\pi}\int_0^l\left(l-2x\right)\cos\frac{\pi kx}{l}dx\right)=\frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l\left(l-2x\right)\cos\frac{\pi kx}{l}dx=$$

$$=\begin{pmatrix} u=l-2x,\ du=-2dx \\ dv=\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\ v=\frac{l}{k\pi}\sin\frac{\pi kx}{l}\end{pmatrix}=\frac{8h}{k\pi l^2}\left(\frac{l}{k\pi}\left(l-2x\right)\sin\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l+\frac{2l}{k\pi}\int_0^l\sin\frac{\pi kx}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int_0^l\sin\frac{\pi kx}{l}dx=\frac{16h}{k^2\pi^2 l}\left(-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l\right)=\frac{16h}{k^3\pi^3}\left(1-\cos\pi k\right)=\frac{16h}{k^3\pi^3}\left(1-\left(-1\right)^k\right)=$$

$$=\begin{cases}0,\ \text{если } k \text{ - четно}\\ \dfrac{32h}{k^3\pi^3},\ \text{если } k \text{ - нечетно}\end{cases}.$$

Окончательно, получаем решение в виде

$$u\left(x,t\right)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^3}\cos\frac{\left(2n+1\right)\pi at}{l}\sin\frac{\left(2n+1\right)\pi x}{l}.$$

Ответт: $$u\left(x,t\right)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^3}\cos\frac{\left(2n+1\right)\pi at}{l}\sin\frac{\left(2n+1\right)\pi x}{l}.$$

4. Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальным и граничными условиями $u\left(x,\ 0\right)=0,\ u\left(0,\ t\right)=0,\ u\left(\pi,\ t\right)=0$:

$$u_t=\frac{1}{9}u_{xx}+5\sin 2t\sin 3x$$

Решение. Рассмотрим соответствующую однородную задачу: $u_t=\frac{1}{9}u_{xx}$, $u\left(x,\ 0\right)=0,\ u\left(0,\ t\right)=0,\ u\left(\pi,\ t\right)=0$ и найдем ее собственные функции. Пусть $\tau=\frac{1}{9}t\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{9}\frac{\partial u}{\partial\tau}$. Тогда уравнение примет вид: $u_\tau=u_{xx}$. Будем искать функцию $u\left(x,\tau\right)$ в виде $u\left(x,\tau\right)=X\left(x\right)T\left(\tau\right)$. Подставим ее в уравнение: $X\left(x\right)T'\left(\tau\right)=$

$$=X''\left(x\right)T\left(\tau\right)\Rightarrow\frac{T'\left(\tau\right)}{T''\left(\tau\right)}=\frac{X''\left(x\right)}{X\left(x\right)}=c\Rightarrow T'\left(\tau\right)-cT\left(\tau\right)=0\Rightarrow T\left(\tau\right)=Ce^{c\tau}$$

, где C – произвольная постоянная. Так как температура $u\left(x,\tau\right)=X\left(x\right)T\left(\tau\right)$ не может неограниченно возрастать по абсолютной величине при $\tau\to\infty$ (то есть при $t\to\infty$), то c должно быть отрицательно, то есть $c=-\lambda^2\Rightarrow T\left(\tau\right)=Ce^{-\lambda^2\tau}$.

Решим теперь уравнение $\frac{X''\left(x\right)}{X\left(x\right)}=c$, где $c=-\lambda^2$. Имеем $X''\left(x\right)+\lambda^2X\left(x\right)=0$. Характеристическое уравнение имеет вид: $r^2+\lambda^2=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm\lambda i$. Тогда общее решение:

$$X\left(x\right)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x\Rightarrow u=\left(AC\cos\lambda x+BC\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2\tau}=$$

$=\left(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x\right)e^{-\lambda^2\tau}$, где $\alpha=AC,\ \beta=BC$. Константа λ должна удовлетворять уравнению: $\mathrm{tg}\lambda l=\frac{k\lambda\left(h_0+h_l\right)}{k^2\lambda^2-h_0h_l}$, где h_0 и h_l – коэффициенты теплообмена на концах стержня. В случае теплоизоляции какого-либо конца надо соответствующий коэффициент положить равным нулю, а в случае постоянства температуры устремить этот коэффициент к бесконечности.

В нашем случае $u(0,t)=u(\pi,t)=0 \Rightarrow h_0 \to \infty,\ h_\pi \to \infty$. Тогда $\operatorname{tg}\pi\lambda = \dfrac{k\lambda\left(\dfrac{1}{h_\pi}+\dfrac{1}{h_0}\right)}{\dfrac{k^2\lambda^2}{h_0 h_\pi}-1} \to 0$ при $h_0 \to \infty,\ h_\pi \to \infty$, то есть $\operatorname{tg}\pi\lambda = 0 \Rightarrow \pi\lambda = \pi k,\ k \in Z \Rightarrow\ \Rightarrow \lambda_k = k,\ \ k = 0,1,2,\ \dots$

Таким образом, $u_k = \left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right) e^{-\frac{k^2 t}{9}}$. Так как $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{k\lambda}{h_0}$ и $h_0 \to \infty$, то $\forall k\ \ \alpha_k = 0$.

Следовательно, $u_k = \beta_k \sin kx \cdot e^{-\frac{k^2 t}{9}}$, то есть собственные функции однородной задачи имеют вид: $\sin kx$.

Решение неоднородной задачи ищем в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи:

$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \sin kx$, где $\gamma_k(0)=0$.

Запишем уравнение в виде $u_t - \dfrac{1}{9}u_{xx} = 5\sin 2t \sin 3x$ и заменим функцию $u(x,t)$ на $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t)\sin kx$.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\gamma_k'(t) + \dfrac{k^2}{9}\gamma_k(t)\right)\sin kx = 5\sin 2t \sin 3x$, то есть $5\sin 2t \sin 3x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(t)\sin kx$, где

$$g_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 5\sin 2t \cdot \sin 3x \cdot \sin kx dx = \frac{2}{\pi}\cdot 5\sin 2t \int_0^\pi \sin 3x \cdot \sin kx dx.$$

Следовательно, $\forall k\ \ g_k(t)=0$, кроме $k=3$. Найдем $g_3(t) = \dfrac{10}{\pi}\sin 2t \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 3x dx = $
$= \dfrac{5}{\pi}\sin 2t \displaystyle\int_0^\pi (1-\cos 6x)\, dx = 5\sin 2t$. Тогда имеем задачу Коши: $\gamma_3'(t) + \dfrac{3^2}{9}\gamma_3(t) = 5\sin 2t$, $\gamma_3(0)=0$, то есть $\gamma_3'(t) + \gamma_3(t) = 5\sin 2t,\ \gamma_3(0)=0$. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $r+1=0 \Rightarrow r=-1$. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения: $\tilde{\gamma}_3 = Ce^{-t}$. Частное решение γ_3^* неоднородного уравнения будем искать в виде:

$\gamma_3^* = A\cos 2t + B\sin 2t$. Подставим γ_3^* в неоднородное уравнение:

$$-2A\sin 2t + 2B\cos 2t + A\cos 2t + B\sin 2t =$$
$$= 5\sin 2t \Rightarrow \begin{cases} 2B + A = 0 \\ -2A + B = 5 \end{cases} \Rightarrow A=-2,\ B=1$$

, то есть $\gamma_3^* = -2\cos 2t + \sin 2t$.

Тогда $\gamma_3(t) = \tilde{\gamma}_3 + \gamma_3^* = -2\cos 2t + \sin 2t + Ce^{-t}$. Воспользуемся начальным условием $\gamma_3(0)=0 \Rightarrow -2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$. Значит, $\gamma_3(t) = \sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t}$. Тогда искомое решение имеет вид $u(x,t) = \left(\sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t}\right)\sin 3x$.

Ответ: $u(x,t) = \left(\sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t}\right)\sin 3x$

5. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге: $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,\ u\big|_{r=1} = 2\cos^3\varphi$.

Решение. Уравнение Лапласа имеет вид: $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \Rightarrow \Rightarrow r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$.

Решение ищем в виде: $u(r,\ \varphi)=U(r)\Phi(\varphi)$. Тогда

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\Phi=-\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}U \Rightarrow \frac{r}{U}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \Rightarrow \frac{r}{U}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)=\lambda,\ \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\lambda.$$

Решим второе уравнение: $\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-\lambda \Rightarrow \dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\lambda\Phi=0 \Rightarrow \Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+$ $+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi$, где $\sqrt{\lambda}=n\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ ...)$, то есть $\lambda=n^2$. Значит, $\Phi(\varphi)=A\cos n\varphi+B\sin n\varphi$.

Тогда $\dfrac{r}{U}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dU}{dr}\right)=n^2 \Rightarrow r^2\dfrac{d^2U}{dr^2}+r\dfrac{dU}{dr}-n^2U=0$. Решение этого уравнения ищем в виде

$$U(r)=r^{\alpha} \Rightarrow r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}+r\alpha r^{\alpha-1}-n^2r^{\alpha}=0 \Rightarrow \left(\alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2\right)r^{\alpha}=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0 \Rightarrow \alpha^2-\alpha+\alpha-n^2=0 \Rightarrow \alpha^2=n^2 \Rightarrow \alpha=n$ (так как функция $U(r)=r^{-n}$ не ограничена при $r=0$). Значит, $U(r)=r^n$. Тогда

$$u_n(r,\ \varphi)=U_n(r)\Phi_n(\varphi)=r^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right).$$

Тогда

$u(r,\ \varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(r,\ \varphi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)\cdot r^n$. Переобозначим коэффициенты:

$A_0=\dfrac{a_0}{2},\ A_n=a_n,\ B_n=b_n\ (n=1,\ 2,\ ...)$ Тогда $u(r,\ \varphi)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\cdot r^n$.

Используем теперь условие $u(1,\ \varphi)=u\big|_{r=1}=2\cos^3\varphi$. Постольку поскольку

$\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi \Rightarrow \cos^3\varphi=\dfrac{1}{4}\left(\cos 3\varphi+3\cos\varphi\right)$, то $u(1,\ \varphi)=\dfrac{1}{2}\left(\cos 3\varphi+3\cos\varphi\right)$.

Имеем: $u(1,\ \varphi)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos 3\varphi+3\cos\varphi\right)$. Отсюда следует, что

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos 3\varphi+3\cos\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{3}\sin 3\varphi\Big|_0^{2\pi}+3\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=0,$$

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{2}\left(\cos 3\varphi+3\cos\varphi\right)\cdot\cos n\varphi d\varphi \Rightarrow$ все $a_n=0$, кроме a_1 и a_3. Имеем

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi=\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi=\frac{3}{2},\ a_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 3\varphi d\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos 6\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi=\frac{1}{2},\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos 3\varphi+3\cos\varphi\right)\cdot\sin n\varphi d\varphi=0$$

для всех n. Таким образом, $u(r,\ \varphi)=\dfrac{3}{2}r\cos\varphi+\dfrac{1}{2}r^3\cos 3\varphi$.

Проверка: $u(1,\ \varphi)=\dfrac{3}{2}\cos\varphi+\dfrac{1}{2}\cos 3\varphi=\dfrac{3}{2}\cos\varphi+\dfrac{1}{2}\left(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi\right)=2\cos^3\varphi$ – верно.

$$r^2u_{rr}+ru_r+u_{\varphi\varphi}=r^2\left(3r\cos 3\varphi\right)+r\left(\frac{3}{2}\cos\varphi+\frac{3}{2}r^2\cos 3\varphi\right)-\frac{3}{2}r\cos\varphi-\frac{9}{2}r^3\cos 3\varphi=$$

$=3r^3\cos 3\varphi+\dfrac{3}{2}r\cos\varphi+\dfrac{3}{2}r^3\cos 3\varphi-\dfrac{3}{2}r\cos\varphi-\dfrac{9}{2}r^3\cos 3\varphi=0$ – верно.

Ответ: $u(r,\ \varphi)=\dfrac{3}{2}r\cos\varphi+\dfrac{1}{2}r^3\cos 3\varphi$.

5.2 Вопросы к зачету

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях с частными производными 2-го порядка. Однородные линейные дифференциальные уравнения с частными производными и свойства их решений.
2. Типы уравнений 2-го порядка с частными производными. Приведение к каноническому виду.
3. Вывод уравнения колебаний струны.
4. Постановка начальных и краевых условий.
5. Бесконечная струна. Метод Даламбера.
6. Корректность постановки задачи.
7. Полубесконечная струна.
8. Метод Фурье для уравнения колебаний струны. Задача Штурма – Лиувилля.
9. Стоячие волны. Примеры на метод Фурье для уравнения колебаний струны.
10. Вынужденные колебания струны.
11. Вывод уравнения линейной теплопроводности.
12. Начальные и краевые условия для уравнения теплопроводности.
13. Метод Фурье для бесконечного стержня.
14. Преобразование решения уравнения теплопроводности.
15. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности и его физический смысл.
16. Примеры на теплопроводность в бесконечном стержне.
17. Теплопроводность в конечном стержне. Приведение к задаче с однородными краевыми условиями. Метод Фурье.
18. Распространение тепла в стержне в случаях постоянной температуры на концах или теплоизоляции концов.
19. Примеры на теплопроводность в конечном стержне.
20. Теплопроводность в полубесконечном стержне.
21. Оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических координатах.
22. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа.
23. Метод функции Грина для задачи Дирихле (трехмерный случай).
24. Метод функции Грина для задачи Дирихле (двумерный случай).
25. Задача Неймана.
26. Сопряженные точки. Задача Дирихле для шара.
27. Примеры к задаче Дирихле для шара: 1) Дан однородный шар радиуса R, верхняя половина границы которого поддерживается при температуре 1, а нижняя – при температуре 0. Найти стационарное распределение температуры вдоль диаметра шара SN; 2) Дан однородный шар радиуса R и на его границе – сфере Г – точка M со сферическими координатами Θ' и φ'. На Г проведем маленький кружок с центром в точке M, который виден из центра сферы под углом 2ε. Получим сферический сегмент Σ. Пусть граничная температура $\tilde{u}$ на всей сфере Г, кроме сегмента Σ, равна 0, а на Σ равна $\dfrac{1}{4\pi R^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$. Найти стационарное распределение температуры внутри шара при малых значениях угла ε.
28. Задача Дирихле для внешности шара.
29. Задача Дирихле для полупространства.
30. Примеры к задаче Дирихле для полупространства: 1) На границе $z=0$ однородного полупространства $z>0$ температура равна 0 для $x<0$ и равна 1 для $x>0$. Найти стационарное распределение температуры в полупространстве.
31. 2) На границе $z=0$ однородного полупространства $z>0$ поддерживается температура 0 всюду вне круга радиуса R с центром в начале координат, а внутри этого круга поддерживается температура 1. Найти стационарное распределение температуры на положительной полуоси z_0.
32. Задача Дирихле для круга.
33. Пример к задаче Дирихле для круга: дана тонкая однородная круглая пластинка радиуса R, верхняя половина границы которой поддерживается при температуре 1, а нижняя – при температуре 0. Найти стационарное распределение температуры на пластинке и определить форму изотерм.

34. Задача Дирихле для внешности круга.
35. Задача Дирихле для полуплоскости. Пример: дана однородная полуплоскость $y_0 > 0$, граница которой – ось x - поддерживается при температуре 0 при $|x| > l$ и при температуре 1 для $|x| < l$. Найти стационарное распределение температуры в полуплоскости и соответствующие изотермы.
36. Метод Фурье для уравнения Лапласа. Двумерное уравнение Лапласа и задача Дирихле для круга.
37. Разделение переменных в трехмерном уравнении Лапласа в сферических координатах. Многочлены Лежандра.
38. Решение задачи Дирихле для шара в осесимметричном случае разложением по многочленам Лежандра.